



ÉNONCÉ

Navigation :  Énoncé  Corrigé



Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- ▶ On notera $M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- ▶ Dans $M_n(\mathbb{R})$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté \det .
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.
- ▶ On sera amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in M_n(\mathbb{R})$ on a alors dans $M_{2n}(\mathbb{R})$:
 - $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$
 - Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on rappelle que $M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$
 - $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$







Partie I: Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $M_{2n}(\mathbb{R})$ définie par: $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$. On note

$$Sp_{2n} = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}), M^\top JM = J\}$$

1. Calculer J^2 et J^\top en fonction de I_{2n} et J . Montrer que J est inversible et identifier son inverse. 
2. Vérifier que $J \in Sp_{2n}$ et que pour tout réel α , 

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in Sp_{2n}$$


3. Pour tout $U \in GL_n(\mathbb{R})$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^\top \end{pmatrix}$ est dans Sp_{2n} . 
4. Si $M \in Sp_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$. 
5. Montrer que le produit de deux éléments de Sp_{2n} est un élément de Sp_{2n} . 
6. Montrer qu'un élément de Sp_{2n} est inversible et que son inverse appartient à Sp_{2n} . 
7. Montrer que si $M \in Sp_{2n}$ alors $M^\top \in Sp_{2n}$. 
8. Soit M une matrice de $M_{2n}(\mathbb{R})$ écrite sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ 



Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à Sp_{2n} .

Partie II: Centre de Sp_{2n}


On s'intéresse ici au centre \mathcal{Z} de Sp_{2n} c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in Sp_{2n}, \forall N \in Sp_{2n}, MN = NM\}$$


9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$. 

ÉNONCÉNavigation :  Énoncé  Corrigé


Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible. 

11. Soit $U \in GL_n(\mathbb{R})$.

En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^\top \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in GL_n(\mathbb{R})$. 


12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A , où $(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. 

Partie I: Le groupe symplectique

- Tous les blocs qui interviennent dans ce qui suit sont carrés d'ordre n , donc les produits par blocs ne posent pas de problème.

On trouve de suite que $J^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$, et que $J^\top = -J$.


- La relation $J^2 = -I_{2n}$ garantit que J est inversible et que son inverse est $-J$. 

- D'après la première question, $J^\top J J = -J^2 J = J$, donc $J \in \text{Sp}_{2n}$

- Pour tout réel α , $K(\alpha)^\top = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

Là encore, les produits par blocs qui suivent ne posent pas de problème, et


$$\begin{aligned} K^\top(\alpha) J K(\alpha) &= \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha I_n + \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

donc $K(\alpha) \in \text{Sp}_{2n}$ 

- Soit $U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.


Les produits par blocs qui suivent ne posent toujours pas de problème, et :

$$\begin{aligned} L_U^\top J L_U &= \begin{pmatrix} U^\top & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_n & -U^\top \\ U^{-1} & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_n & -U^\top (U^{-1})^\top \\ U^{-1} U & 0_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais on sait que la transposée d'une matrice inversible est inversible, et que l'inverse de sa transposée est la transposée de son inverse. Ainsi, $L_U^\top J L_U = J$, donc $L_U \in \text{Sp}_{2n}$ 

- On sait que le déterminant du produit de deux matrices carrées de même ordre A et B est le produit des déterminants de A et B , et qu'une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant.


Ainsi, si $M \in \text{Sp}_{2n}$, $\det(M^\top J M) = (\det(M))^2 \det(J)$, donc $(\det(M))^2 \det(J) = \det(J)$.

Mais on a vu que J est inversible, donc son déterminant est non nul, donc $(\det(M))^2 = 1$, donc $\det(M) \in \{-1, +1\}$. 


- Soit M et N deux éléments de Sp_{2n} .


- M et N sont donc deux éléments de $M_{2n}(\mathbb{R})$, donc leur produit est défini et élément de $M_{2n}(\mathbb{R})$.
- Par appartenance de M puis N à Sp_{2n} ,

$$(MN)^\top J (MN) = N^\top (M^\top J M) N = N^\top J N = J$$

Finalement, $MN \in \text{Sp}_{2n}$ 

- D'après 4, les éléments de Sp_{2n} sont de déterminant non nul, donc inversibles.

- ▶ Si $M \in \text{Sp}_{2n}$, et comme M, M^\top et J sont inversibles, $(M^\top JM)^{-1} = J^{-1}$, donc $M^{-1}J^{-1}(M^\top)^{-1} = J^{-1}$.
On remplace J^{-1} par $-J$, $(M^\top)^{-1}$ par $(M^{-1})^\top$, et on transpose, ce qui donne : $-M^{-1}J^\top(M^{-1})^\top = -J^\top$.
Mais $J^\top = -J$, donc $M^{-1}J(M^{-1})^\top = J$. Finalement, $M^{-1} \in \text{Sp}_{2n}$ 

7. Si $M \in \text{Sp}_{2n}$, alors $M^\top JM = J$, donc, en transposant, $M^\top J^\top M = J^\top$, donc, en remplaçant J^\top par $-J$ et en multipliant par -1 , $M^\top JM = J$, donc $M^\top \in \text{Sp}_{2n}$ 

8. ▶ On ne travaille que sur des blocs carrés d'ordre n , donc les produits par blocs qui suivent ne posent toujours pas de problème.

▶ $M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} M^\top JM &= \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^\top & -A^\top \\ D^\top & -B^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^\top A - A^\top C & C^\top B - A^\top D \\ D^\top A - B^\top C & D^\top B - B^\top D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▶ Ainsi, comme tous les blocs qui interviennent sont carrés d'ordre n , $M \in \text{Sp}_{2n}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} C^\top A - A^\top C &= 0_n \\ C^\top B - A^\top D &= -I_n \\ D^\top A - B^\top C &= I_n \\ D^\top B - B^\top D &= 0_n \end{cases}$$



Partie II: Centre de Sp_{2n}

9. I_{2n} et $-I_{2n}$ commutent avec toute matrice carrée d'ordre $2n$, donc avec tout élément de Sp_{2n} . Finalement :

$$\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$$



10. ▶ Avec les notations de I, $L = K^\top(-1)$, donc, d'après 2 et 7, L est élément de Sp_{2n} .

▶ Ainsi, $LM = ML$, donc, toujours puisque les produits par blocs ne posent pas de problème et puisque les tailles des blocs des deux membres correspondent,

$$\begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix}$$


et donc $C = 0_n$ et $D = A$.

Comme $L \in \text{Sp}_{2n}$, $L^\top \in \text{Sp}_{2n}$, donc $L^\top M = ML^\top$, donc, en tenant compte des relations déjà acquises,


$$\begin{pmatrix} A & B \\ A & B+A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ A & B \end{pmatrix}$$

Donc $B = 0_n$.

▶ Ainsi, $M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$, donc, d'après le dernier résultat rappelé en préambule,

$\det(M) = (\det(A))^2$. Or M est inversible, donc de déterminant non nul, donc A est de déterminant non nul, donc A est inversible. 

11. On sait que, si $U \in GL_n(\mathbb{R}), L_U \in Sp_{2n}$, donc $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} L_U = L_U \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

En identifiant les blocs carrés d'ordre n supérieurs gauches des deux membres, on obtient : $AU = UA$ 

12. ► Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, I_n + E_{ij}$ est une matrice triangulaire donc les coefficients diagonaux valent tous 1 ou 2, donc sont non nuls. Par conséquent, $I_n + E_{ij}$ est inversible.

► Ainsi, pour tout $(i, j) \in ((1, n))^2, (I_n + E_{ij})A = A(I_n + E_{ij})$, donc, en développant, $E_{ij}A = AE_{ij}$.

On explicite A sous la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Toutes les lignes de $E_{ij}A$ sont nulles, sauf la i -ième, qui est $(a_{j1} \cdots a_{jn})$.

Toutes les colonnes de AE_{ij} sont nulles, sauf la j -ième, qui vaut $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

On en déduit que, pour $k \neq j, a_{jk} = 0$, et que $a_{jj} = a_{ii}$.

► Par conséquent, A est une matrice dont les coefficients non diagonaux sont tous nuls et les coefficients diagonaux tous, égaux, donc A est de la forme λI_n , où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0_n \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}$, donc $\det(M) = \lambda^{2n}$.

Mais, d'après 4, le déterminant d'un élément de Sp_{2n} est 1 ou -1 , donc $\lambda \in \{-1, +1\}$, donc $M \in \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

► On vient de démontrer que $\mathcal{Z} \subset \{-I_{2n}, I_{2n}\}$, et on a prouvé en Q9 que $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Enfinement : $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$ 