ÉNONCÉ

Navigation : Énoncé Corrigé

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.
- $n \geqslant 2$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On désigne par $B = (E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice identité.
- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des matrices dont le déterminant vaut 1.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on note $L_1, \cdots, L_n$ ses lignes et $C_1, \cdots, C_n$ ses colonnes.
- Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ est dite de transvection.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii}$ est dite de dilatation.

Partie I: Préliminaires

1. Que vaut le produit $E_{ij}E_{k\ell}$?
2. Calculer le produit $T_{ij}(\lambda)A$ et interpréter le résultat obtenu sous forme d'une opération élémentaire sur les lignes de A.
3. Calculer le produit $AT_{ij}(\lambda)$ et interpréter le résultat obtenu sous forme d'une opération élémentaire sur les colonnes de A.
4. Calculer le produit $T_{ij}(\lambda) \times T_{ij}(-\lambda)$ et déduire $T_{ij}(\lambda)^{-1}$.
5. (a) Calculer le produit $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$. En déduire que l'on peut effectuer l'opération élémentaire $L_j \longleftrightarrow -L_i$ à l'aide d'un produit de transvections.

   (b) Peut-on permuter deux lignes de A à l'aide d'un produit de transvections?

Partie II: Générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

On suppose dans cette partie que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

6. On suppose qu'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$. Déterminer un scalaire λ tel que $T_{1i}(\lambda)A$ soit de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

7. Dans le cas général, en utilisant le préliminaire, justifier l'existence $A_1, \cdots, A_r$, matrices de transvections telles que : $A_r \cdots A_1 A$ soit de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

8. Montrer qu'il existent des matrices de transvections, $M_1, \cdots, M_p$ et $N_1, \cdots, N_q$ telles que $M_p \cdots M_1 A N_1 \cdots N_q$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

9. On note $\alpha = \det(A)$. Montrer qu'il existe des matrices de transvections $U_1, \cdots, U_r$ et $V_1, \cdots, V_s$ telles que

$$A = U_r \cdots U_1 D_n(\alpha) V_1 \cdots V_s$$

10. En déduire que le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

11. En déduire que le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

Partie III: Préliminaires

1. Il s'agit d'une question de cours $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$, avec $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. On écrit A dans la base canonique $A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k\ell}$ et on tient compte de la définition de $T_{ij}(\lambda)$ et la formule de la question précédente, alors

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda)A &= (I_n + \lambda E_{ij})\, A = A + \lambda E_{ij}A \\ &= A + \lambda\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{ij}E_{k\ell} \\ &= A + \lambda\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\delta_{j,k}E_{i\ell} \\ &= A + \sum_{\ell=1}^{n} \lambda a_{j,\ell}E_{i\ell} \end{aligned}$$

Notons $A' = T_{ij}(\lambda)A = \left(a'_{k,\ell}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, alors

$$a'_{k,\ell} = \begin{cases} a_{k,\ell} & \text{si } k \neq i \\ a_{k,\ell} + \lambda a_{j,\ell} & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons $L'_1, \cdots, L'_n$ les lignes de A', alors

$$L'_k = \begin{cases} L_k & \text{si } k \neq i \\ L_i + \lambda L_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit $T_{ij}(\lambda)A$ s'obtient de A par l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$

3. De même on a:

$$\begin{aligned} AT_{ij}(\lambda) &= A\,(I_n + \lambda E_{ij}) = A + \lambda AE_{ij} \\ &= A + \lambda\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k\ell}E_{ij} \\ &= A + \lambda\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\delta_{\ell,i}E_{kj} \\ &= A + \sum_{k=1}^{n} \lambda a_{k,i}E_{kj} \end{aligned}$$

Notons $A' = AT_{ij}(\lambda) = \left(a'_{k,\ell}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, alors

$$a'_{k,\ell} = \begin{cases} a_{k,\ell} & \text{si } \ell \neq j \\ a_{k,j} + \lambda a_{k,i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons $C'_1, \cdots, C'_n$ les lignes de A', alors

$$C'_\ell = \begin{cases} C_\ell & \text{si } \ell \neq j \\ C_j + \lambda C_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement-dit $AT_{ij}(\lambda)$ s'obtient de A par l'opération élémentaire $C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i$

4. On a:

$$T_{ij}(\lambda) \times T_{ij}(-\lambda) = I_n^2 - \lambda^2 E_{ij}^2 = I_n - \lambda^2 \delta_{i,j} E_{ij} = I_n$$

Par le calcul précédent $T_{ij}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

5. (a) Notons $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de A et on écrit A sous forme de lignes en posant $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A &= T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\
&= T_{ij}(1)T_{ji}(-1) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\
&= T_{ij}(1) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ -L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ -L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi on peut effectuer l'opération élémentaire $L_j \longleftrightarrow -L_i$ à l'aide d'un produit de transvections.

(b) La multiplication par un produit de transvections ne change pas le déterminant par contre permuter deux lignes d'une matrice oppose le déterminant

Partie IV: Générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

On suppose dans cette partie que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible.

6. On suppose qu'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$. Le coefficient de position $(1,1)$ de $A' = T_{1i}(\lambda)A$ vaut $a_{11} + \lambda a_{i1}$, donc pour que $a_{11} + \lambda a_{i1} = 1$ on prend $\lambda = \dfrac{1-a_{11}}{a_{i1}}$
7. Puisque A est inversible, alors la première colonne de A est non nulle. On distingue deux cas:
   - S'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$, on se ramène à la question précédente
   - Si $a_{i1} = 0$ pour tout $i \in [\![2,n]\!]$. Alors $a_{11} \neq 0$ et pour $i \geqslant 2$ on mupltiplie A à gauche par la matrice de transvection $T_{i1}(1)$. La matrice résultante est de coefficient de position $(i,1)$ vaut $a_{11} \neq 0$ et on se ramène au premier cas
8. D'après la question précédente il existe $A_1, \cdots, A_r$, matrices de transvections telles que : $A_r \cdots A_1 A$ soit de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

On multiplie A' à gauche par $\prod_{k=2}^{n} T_{k1}(-a_{k1})$ puis à droite par $\prod_{k=2}^{n} T_{1k}(-a_{1k})$ et on trouve

$$\prod_{k=2}^{n} T_{k1}(-a_{k1}) A' \prod_{k=2}^{n} T_{1k}(-a_{1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

On remplace A' par $A_r \cdots A_1 A$ et on trouve l'égalité souhaitée
9. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
   - Pour $n = 1$, rien à démontrer.
   - Soit $n \geqslant 2$ et soit $A \in \mathrm{GL}(n) K$. D'après la question précédente il existe des matrices de transvections $M_1, \cdots, M_p$ et $N_1, \cdots, N_q$ telles que $M_p \cdots M_1 A N_1 \cdots N_q$ soit de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$\det(B) = \det(A) \neq 0$, donc $B \in \mathrm{GL}(n-1) K$. Par hypothèse de récurrence il existe des matrices de transvections $P_1, \cdots, P_k$ et $Q_1, \cdots, Q_\ell$ telles que

$$B = P_k \cdots P_1 D_n(\alpha) Q_1 \cdots Q_\ell$$

Pour $i \in [\![1,k]\!]$ et $j \in [\![1,\ell]\!]$, on pose

$$P_i' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_i & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad Q_j' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_j & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{et} \quad D_n'(\alpha) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_n(\alpha) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Les matrices P_i' et Q_j' sont de transvections. On combine ces égalités, on obtient:

$$M_p \cdots M_1 A N_1 \cdots N_q = P_k' \cdots P_1' D_n'(\alpha) Q_1' \cdots Q_\ell'$$

Soit

$$A = M_1^{-1} \cdots M_p^{-1} . P_k' \cdots P_1' D_n'(\alpha) Q_1' \cdots Q_\ell' . N_q^{-1} \cdots N_1^{-1}$$

Récurrence achevée

10. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Posons $\alpha = \det(A)$. D'après la question précédente il existe des matrices de transvections $U_1, \cdots, U_r$ et $V_1, \cdots, V_s$ telles que
$$A = U_r \cdots U_1 D_n(\alpha) V_1 \cdots V_s$$
Ce qui montre que $\mathrm{GL}\,(n)\,K$ est engendré par les transvections et les dilatations.

11. Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = 1$. D'après la question précédente il existe des matrices de transvections $U_1, \cdots, U_r$ et $V_1, \cdots, V_s$ telles que
$$A = U_r \cdots U_1 D_n(1) V_1 \cdots V_s = U_r \cdots U_1 . V_1 \cdots V_s$$
Ce qui montre que $\mathrm{SL_n}\,(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.