ÉNONCÉ

Navigation : *Énoncé* *Corrigé*

Partie I: Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $G^+=\{x\in G \mid x>0\}$ et $\alpha=\inf G^+$

1. Justifier l'existence de α
2. Dans cette question on suppose que $\alpha>0$.
   (a) Montrer que $\alpha\in G^+$
   (b) Montrer que $G=\alpha\mathbb{Z}$.
   On dit dans ce cas que G est dicret
3. On suppose que $\alpha=0$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x<y$:
   (a) Montrer qu'il existe $z\in G$ tel que $0<z<y-x$;
   (b) Montrer que $G\cap]x,y[\neq\emptyset$;
   (c) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$
4. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ tel que
$$\exists\varepsilon>0,\quad]1,1+\varepsilon[\cap H=\emptyset$$
   Montrer que H est monogène, c'est-à-dire, il existe $\gamma\in H$ tel que $H=<\gamma>$

Partie II: Applications à la densité

5. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on pose $H:=a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\left\{an+bm \mid (m,n)\in\mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que
$$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\iff\exists\gamma\in\mathbb{R}\quad\text{tel que } H=\gamma\mathbb{Z}$$
6. Soit r un irrationnel. On pose $\mathcal{G}:=\left\{m+nr \mid (m,n)\in\mathbb{Z}^2\right\}$
   (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathbb{R}$
   (b) Soit c et d deux réels tels que $0<c<d<1$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que : $c<nr-E(nr)<d$
7. Soit a et b deux réels tels que $a<b$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $a<\tan n<b$.
8. Soit a et b deux réels tels que $-1\leqslant a<b\leqslant 1$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a<\cos n<b$.

Partie III: Équations de Pell-Fermat

Soit m un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.
On appelle équation de Pell-Fermat toute équation de la forme $x^2-my^2=1$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$

9. Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x+y\sqrt{m}>1$ et $x^2-my^2=1$.
   Montrer que $x+y\sqrt{m}\geqslant 1+\sqrt{m}$
10. On pose
$$G_m:=\left\{x+y\sqrt{m} \mid (x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x+y\sqrt{m}>0\ \text{ et } x^2-my^2=1\right\}$$
   Montrer qu'il existe $\gamma_m\in G_m$ tel que $G_m=\{\gamma_m^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$
11. Déterminer, γ_m pour $m=2$, $m=3$ et $m=5$

Partie I: Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

1. G^+ est une partie non vide et minorée par 0, ceci justifie l'existence de α.
2. Supposons que $\alpha > 0$
   (a) Par absurde, on suppose que $\alpha \notin G^+$.
   Pour $\varepsilon = \alpha$, il existe $y \in G^+$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$. Pour $\varepsilon = y - \alpha > 0$, il existe $x \in G^+$ tel que $\alpha < x < y$, il vient que $0 < y - x < \alpha$, donc $y - x \in G^+$, ce qui est absurde
   (b) Il est clair $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ car $\alpha \in G$.
   Inversement. Soit $x \in G$, il existe un entier n tel que
   $$na \leqslant x < (n+1)a$$
   Alors $x - n\alpha$ est un nombre positif de G strictement inférieur à α. Il en résulte que ce nombre est nul, ce qui prouve que x appartient à $\alpha\mathbb{Z}$. On a donc bien l'égalité
   $$G = \alpha\mathbb{Z}$$
3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Le réel $b - a > 0$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $z \in G^+$ tel que $z < b - a$.
   (b) Soit $n = E\left(\frac{a}{z}\right) + 1$, on a:
   $$\frac{a}{z} < n = E\left(\frac{a}{z}\right) + 1 \leqslant \frac{a}{z} + 1 < \frac{b}{z}$$
   Ainsi $a < nz < b$, soit $]a, b[\cap G \neq \emptyset$
   (c) Comme pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a $]a, b[\cap G \neq \emptyset$, donc G est dense dans $\mathbb{R}$
4. La fonction $\ln$ réalise un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(\mathbb{R},+)$, donc $G = \ln(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Soit $v = \ln(1+\varepsilon) > 0$, l'hypothèse $]1, 1+\varepsilon[\cap H = \emptyset$ fournit $]0, v[\cap G = \emptyset$, donc G est de la forme $a\mathbb{Z}$. Posons finalement $\gamma = e^a$, alors
   $$H = \exp(G) = \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Partie II: Applications à la densité

5. $\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H = \gamma\mathbb{Z}$. Il existe p et q entiers tels que: $a = \gamma.p$ et $b = \gamma.q$.
   Alors $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
   $\Rightarrow$) Réciproquement, si $\frac{a}{b}$ est rationnel, il existe p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$.
   Posons $\gamma = \frac{b}{q}$. On a $a = \gamma p$ et $b = \gamma q$, ce qui prouve que a et b appartiennent à $\gamma\mathbb{Z}$, donc $H \subset \gamma\mathbb{Z}$.
   D'autre part, il existe m et n premiers entre eux tels que $mp + nq = 1$. Donc, en multipliant par γ
   $$\gamma = mp\gamma + nq\gamma = ma + nb$$
   ce qui montre que γ appartient à H, et donc que $\gamma\mathbb{Z}$ est inclus dans H. On a bien l'égalité $H = \gamma\mathbb{Z}$.
6. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(a) G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, donc G est soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Puisque $r \notin \mathbb{Q}$, d'après la question précédente, G n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, donc G est dense dans $\mathbb{R}$

(b) L'ensemble G est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $m,n \in \mathbb{Z}$ tel que $c < m+nr < d$. Le réel $m+nr$ appartient à $]0,1[$, donc de partie entière nulle, donc $m = -E(nr)$, par suite $c < nr - E(nr) < d$

7. Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a $\arctan a < \arctan b$. Le sous-groupe T est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $m,n \in \mathbb{Z}$ tels que $\arctan a < n + m\pi < \arctan b$, puis par la périodicité de la tangente on obtient $a < \tan n < b$

8. Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$, la fonction $\arccos$ est strictement décroissante sur $[-1,1]$, alors

$$0 \leqslant \arccos b < \arccos a \leqslant \pi$$

Le sous-groupe $T = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, car $2\pi \notin \mathbb{Q}$. Il existe $m,n \in \mathbb{Z}$ tels que $\arccos b < n + 2m\pi < \arccos a$, puis par la périodicité et la décroissance stricte de la fonction cosinus on obtient $a < \cos n < b$

Remarque

On peut utiliser ici que l'image d'une partie dense par une application continue est aussi dense dans l'image de l'application.

Partie III: Équations de Pell-Fermat

9. Soit $x,y \in \mathbb{Z}$ tels que $x+y\sqrt{m} > 1$ (1) et $x^2-my^2 = 1$. Les égalités $x^2-my^2 = (x-y\sqrt{m})(x+y\sqrt{m}) = 1$ montrent que $0 < x - y\sqrt{m} < 1$ (2). On somme (1) et (2) on obtient $2x > 1$, donc $x \geqslant 1$ puis (2) donne $0 \leqslant x-1 < y\sqrt{m}$, soit $y \geqslant 1$. Finalement $x + y\sqrt{m} \geqslant 1 + \sqrt{m}$

10. Montrons que G_m est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$
    - $1 \in G_m$
    - Soit $a,b \in G_m$, il existe $x,y,\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = x+y\sqrt{m}$, $b = \alpha+\beta\sqrt{m}$, $x^2-my^2 = 1$ et $\alpha^2 - m\beta^2 = 1$. On a:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x+y\sqrt{m}} = x - y\sqrt{m} \in G_m$$

et

$$ab = \left(x+y\sqrt{m}\right)\left(\alpha+\beta\sqrt{m}\right) = (\underbrace{\alpha x + m\beta y}_{\in\mathbb{Z}}) + (\underbrace{\beta x + \alpha y}_{\in\mathbb{Z}})\sqrt{m}$$

Or

$$\begin{aligned}(\alpha x + m\beta y)^2 - m(\beta x + \alpha y)^2 &= \left(x+y\sqrt{m}\right)\left(\alpha+\beta\sqrt{m}\right)\left(x-y\sqrt{m}\right)\left(\alpha-\beta\sqrt{m}\right)\\ &= \left(x^2-my^2\right)\left(\alpha^2-m\beta^2\right) = 1\end{aligned}$$

On a $]1, 1+\sqrt{m}[\, \cap G_m = \emptyset$, donc il existe $\gamma_m \in G_m$ tel que $G_m = \{\gamma_m^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

11. • **Cas** $m = 2$: Soit $x = a + b\sqrt{2} \in G_2 \cap]1,+\infty[$. Par hypothèse $a^2 - 2b^2 = 1$, donc $a - b\sqrt{2} > 0$. Additionnons x et $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$: $x + \overline{x} = 2a > 0$ et finalement $a > 0$ soit $a \geqslant 1$. Puis le cas $a = 1$ est exclu, car sinon $b = 0$, donc $a \geqslant 2$. Le cas $a = 2$, donne l'égalité $2b^3 = 3$, ce qui est impossible, donc $a \geqslant 3$.

    D'autre part x vérifie l'équation $x^2 = 1 + 2bx\sqrt{2}$, donc $b = \dfrac{x^2-1}{2x\sqrt{2}}$. Conclusion $b > 0$, soit $b \geqslant 1$. Mais $b = 1$ donne $a^2 = 3$, donc $b \geqslant 2$. Ainsi $a + b\sqrt{2} \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$. Ce qui montre que tout élément de $G_2 \cap]1,+\infty[$ est supérieur ou égal à $3+2\sqrt{2}$. Or il se trouve que $3+2\sqrt{2} \in G_2 \cap]1,+\infty[$ comme on le vérifie aisément.

    Donc $\gamma_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

- **Cas** $m = 3$: On trouve $\gamma_3 = 2 + \sqrt{3}$
- **Cas** $m = 5$: On trouve $\gamma_5 = 9 + 4\sqrt{5}$